



Mat á gæðum kennslu í hugsandi skólastofu í stærðfræði á framhaldsskólastigi: Rýnt í kennslu framhaldsskólakennara

Eyþór Eiríksson og Jóhann Örn Sigurjónsson

► Abstract

► Um höfunda

► About the authors

► Heimildir

Hugsandi skólastofa (e. thinking classroom) er kennslunálgun sem snýst um að skapa rými þar sem nemendur vinna saman að verkefnum sem eru hönnuð til að styðja nemendur við að öðlast skilning á nýjum hugtökum og hugmyndum með samræðum. Í þessari rannsókn var fylgst með kennslu eins stærðfræðikennara í íslenskum framhaldsskóla. Markmið rannsóknarinnar var að veita kennaranum endurgjöf á gæði eigin kennslu þegar kennt er eftir hugmyndafræði hugsandi skólastofu og veita innsýn í sjálfsrýni hans um niðurstöðurnar.

Gögnum var safnað með hljóðupptökum og áhorfi í þremur kennslustundum þar sem einum nemendahóp var fylgt eftir í eina kennsluviku. Gæði kennslunnar voru metin út frá greiningarrámanum PLATO fyrir yfirþættina faglegar kröfur (þ.e. *samræður í skólastofunni* og *vitsmunaleg áskorun*) og stigskiptan stuðning (þ.e. *sýnikennsla*, *kennsla námsaðferða* og *endurgjöf*). Helstu niðurstöður voru að í kennslustundunum voru faglegar kröfur almennt metnar á efri þrepum á meðan undirþættir stigskipts stuðnings voru metnir á bæði efri og neðri þrepum. Dæmi voru um sýnikennslu og kennslu námsaðferða á efsta þrepi, en endurgjöf var aldrei metin á efsta þrepi.

Niðurstöðurnar sýna fram á að í íslensku samhengi er hægt að nota aðferðir hugsandi skólastofu til að búa til menningu þar sem nemendur vinna í sameiningu að krefjandi viðfangsefnum sem reyna á greinandi hugsun. Kennari hefur svigrúm til að biðja um rökstuðning og útskýringar. Það gefur nemendum tækifæri til að dýpka skilning sinn á verkefninu og lausnaferlinu. Samræður byggja á svörum nemenda og hafa þau tækifæri til að útskýra, segja frá og beita virkri hlustun. Hugsandi skólastofa virðist gefa tækifæri til að veita nemendum endurgjöf sem kennarinn hefur þó getað nýtt sér betur. Niðurstöður gefa einnig til kynna að hópumræða eftir vinnu og glímu nemenda við stærðfræðihugtök skapi aðstæður til sýnikennslu á efstu þrepum og sé heppilegri heldur en að hugtökin séu kynnt fyrir nemendum áður en þau vinna með þau.

Efnisorð: hugsandi skólastofa, gæði kennslu, stærðfræðimenntun, stærðfræðikennsla, framhaldsskóli, skólastofurannsókn

Inngangur

Gæði kennslu eru mikilvægasti þáttur í námsumhverfi nemenda sem er á valdi kennara að stýra og hefur verið nefnd mikilvægasta stjórnana breytan í menntunarsálfræði (Carroll, 1963). Í seinni tíð hafa rannsakendur beint sjónum að því að setja fram kenningar um kennslu og gæði hennar (Praetorius

og Charalambous, 2023). Þá hafa rannsakendur beitt kerfisbundnum aðferðum við að meta gæði kennslu í mörgum löndum í senn, ýmist með beinu áhorfi eða í gegnum myndbandsupptökur af kennslustundum (Jóhann Örn Sigurjónsson, 2023b; OECD, 2020). Árið 2018 hófst viðamikil gagnasöfnun í grunnskólum á Norðurlöndum á vegum rannsóknarseturs sem bar heitið Quality in Nordic Teaching (QUINT). Meðal meginmarkmiða QUINT var að meta gæði kennslu í 8. bekk skólanna og kanna leiðir til að auka gæði kennslu. Von er á bók með heildarniðurstöðum (Klette o.fl., í prentun-a). Talsverður hluti niðurstaðna hefur verið birtur í greinum og í tveimur þeirra var rýnt í mat á gæðum kennslustunda á Íslandi (Birna Svanbjörnsdóttir o.fl., 2023; Jóhann Örn Sigurjónsson og Berglind Gísladóttir, 2020). Þar kemur meðal annars fram að vitsmunaleg áskorun og endurgjöf var almennt metin af litlum gæðum. Þó voru dæmi um kennslu sem var metin hátt í þessum þáttum og virtist það algengara ef paravinna nemenda kom fyrir í kennslustundinni heldur en ef nemendur unnu eingöngu einstaklingslega.

Viða um heim hefur hefðbundin stærðfræðikennsla verið ráðandi í skólum og lýsir sér í því sem Skovsmose (2001) kallar hugmyndafræði æfingar. Nám og kennsla í stærðfræði á Íslandi er engin undantekning. Úttektir og rannsóknir í bæði efri bekkjum grunnskóla og framhaldsskólum hafa almennt lýst stærðfræðikennslu sem hefðbundinni í þeim skilningi að hún hefst gjarnan á innlögn kennara og síðan vinna nemendur æfingar og verkefni hvert fyrir sig, oft byggt á innlögn kennarans (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014; Ingvar Sigurgeirsson o.fl., 2018; Þóra Þórðardóttir og Unnar Hermannsson, 2012). Á Íslandi virðist sérlega mikil áhersla á einstaklingsvinnu og að nemendur læri tilteknar aðferðir til að leysa ákveðnar gerðir verkefna (Birna Svanbjörnsdóttir o.fl., 2023; Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir, 2015; Savola, 2010). Að setja hugsun nemenda, samvinnu og skilning í forgang hefur fengið talsvert vægi í menntun stærðfræðikennara á Íslandi og skipuleg ígrundun og rannsókn á eigin starfi hefur verið liður í þeirri þróun (Guðný Helga Gunnarsdóttir o.fl., 2013; Jónína Vala Kristinsdóttir og Ólöf Björg Steinþórsdóttir, 2023).

Þessi rannsókn er framkvæmd af starfandi kennara í samstarfi við meðrannsakanda. Rannsóknin hefur því bæði eiginleika starfendarannsóknar, þar sem kennarinn (Eyþór) rannsakar eigið starf, og skólastofurannsóknar meðrannsakandans (Jóhanns) sem ytri aðili framkvæmir. Kennarinn og meðrannsakandinn þekktust ekki fyrir þessa rannsókn og var það frumkvæði kennarans að fá meðrannsakandann til að meta gæði kennslunnar. Meðrannsakandinn lagði hlutlaust mat á gæði kennslu kennarans og fékk kennarinn hvorki sérstaka kynningu á matsrammanum né endurgjöf frá meðrannsakandanum fyrir né á meðan gagnaöflun stóð yfir. Þessi grein var unnin í sameiningu af báðum aðilum en sjálfsrýni kennarans unnin af kennaranum út frá gögnum meðrannsakandans á gæðum kennslunnar.

Kennarinn kennir stærðfræði á framhaldsskólastigi og hefur notast við aðferðir hugsandi skólastofu (Liljedahl, 2020) frá vorönn 2022. Hugsandi skólastofu er stundum lýst sem ákveðinni andstæðu við hefðbundna kennsluhætti. Í hugsandi skólastofu er samvinna nemenda í tveggja til þriggja manna hópum lykilatriði og allir hópar vinna að sama verkefninu. Höfuðáhersla er lögð á hugsun, skilning, sjálfstæði nemenda, að þau saki sér upplýsingar og rökstuðning frá samnemendum og að kennari spyrji svonefndra hugsunarhvetjandi spurninga.

Kennari rannsóknarinnar kynntist niðurstöðum QUINT á ráðstefnu í lok árs 2023 á Íslandi. Á ráðstefnunni var meðal annars farið yfir nokkur hagnýt ráð til að auka gæði samræðna og vitsmunalegrar áskorunar í stærðfræðikennslu út frá niðurstöðum rannsókna tengdum QUINT (Jóhann Örn Sigurjónsson, 2023a). Ráðin fólu meðal annars í sér að velja færri og afmarkaðri verkefni sem nemendur vinna að á sama tíma, skipuleggja samvinnu nemenda að úrlausn þar sem þau þurfa að útskýra hvert fyrir öðru, viðhalda áskorun verkefnanna með því að spyrja spurninga sem krefjast rökstuðnings af hendi nemenda og hafa skýr námsmarkmið í hverri kennslustund. Kennara rannsóknarinnar fannst þessi hagnýtu ráð nátengd helstu áherslum í hugsandi skólastofu og velti fyrir sér hvernig gæði kennslu í eigin hugsandi skólastofu yrðu metin samanborið við hefðbundnari kennsluhætti.

Í rannsókninni leituðu höfundar svara við eftirfarandi rannsóknarspurningum:

- Hvernig má lýsa gæðum kennslu hvað varðar faglegar kröfur og stigskiptan stuðning þegar kennt er eftir hugmyndafræði hugsandi skólastofu í stærðfræði?
- Hvernig samræmast niðurstöðurnar um gæði kennslunnar sýn kennarans og markmiðum kennslunnar?

Bakgrunnur

Gæði kennslu og PLATO-greiningarramminn

Til er aragrúi greiningarramma um gæði kennslu sem allir miða að tvennu; að skilja kennslu og að bæta kennslu (Bell o.fl., 2019). Sumir ramar eru almennir á meðan aðrir eru sérstaklega gerðir til að greina kennslu í tiltekinni námsgrein, svo sem í stærðfræði eða móðurmáli. Almenn aðskilja þessir greiningarramar hugsmíðina um gæði kennslu í yfirþætti sem geta haft nokkra undirþætti. Í samanburði á tólf greiningarrömmum um gæði kennslu í stærðfræði kom fram að nokkrir algengustu þættir snertu hugræna virkjun, þ.e. virka hugsun og hvernig stærðfræðilega merkingarbær viðfangsefni, endurgjöf kennarans og framsetning kennara á efni kennslustundar geta stutt nemendur til virkrar hugsunar (Praetorius og Charalambous, 2018). Greiningarramar af þessu tagi veita ákveðna sýn á gæði kennslu sem er kerfisbundin og hefur einnig verið kölluð forskrifuð (e. prescribed) til aðgreiningar frá tveimur öðrum; byggð á upplifun þátttakenda (kennara eða nemenda) annars vegar og byggð á empirískum gögnum rannsókna hins vegar (Elf, 2022). Samkvæmt Elf verka þessar þrjár sýnir sjálfstætt þó þær hafi einnig innbyrðis tengsl. Í rannsókn okkar verður litið til þessara þriggja þátta; sjónarhorns kennara af upplifun sinni af kennslunni (upplifuð gæði) sem og upplifun hans af kerfisbundinni greiningu á gögnum úr kennslustundum hans (skráð gæði) samkvæmt fyrir fram gefnum greiningarramma um gæði kennslu (forskrifuð gæði).

Greiningarramminn PLATO (e. Protocol for Language Arts Teaching Observations) var upphaflega þróaður í Bandaríkjunum til að lýsa gæðum móðurmálskennslu en síðar aðlagður að öðrum fögum, þar á meðal stærðfræði. PLATO var upphaflega hannaður til að meta tengsl kennsluhátta við árangur nemenda en hefur síðar einnig verið notaður til að aðstoða kennara við að tileinka sér áhrifaríka kennsluhætti í starfsþróunarverkefnum (Bell o.fl., 2019; Grossman o.fl., 2013). Í PLATO eru fjórir yfirþættir sem metnir eru út frá tólf undirþáttum (Grossman, 2015). Í þessari grein er fjallað um niðurstöður í fimm undirþáttum, þ.e. þeim sem tilheyra yfirþáttunum faglegar kröfur (e. disciplinary demand) og stigskiptur stuðningur (e. instructional scaffolding). Faglegar kröfur samanstanda af *samræðum í skólastofunni* (e. Classroom Discourse; CD) og *vitsmunalegri áskorun* (e. Intellectual Challenge; IC). Stigskiptur stuðningur samanstendur af *sýnikennslu og notkun sýnidema* (e. Modelling; MOD eða hér eftir *sýnikennsla*), *kennslu og beitingu námsaðferða* (e. Strategy Use and Instruction; SUI eða hér eftir *kennsla námsaðferða*) og *endurgjöf* (e. Feedback; FEED). Aðrir yfirþættir eru *framsetning og notkun námsefnis* og *aðstæður í skólastofunni*. Í *Töflu 1* er yfirlit um PLATO-viðmið sem hér eru til umfjöllunar.

Tafla 1

PLATO-viðmið ásamt grundvallarspurningu hvers undirþáttar

Faglegar kröfur		
Samræður í skólastofunni (CD)	Vitsmunaleg áskorun (IC)	
Hver eru tækifæri nemenda til samræðna um námsefnið og að hvaða marki byggir kennari á hugmyndum nemenda?	Hver þarf að hugsa, kennari eða nemendur? Að hvaða marki þurfa nemendur að beita greinandi hugsun?	
Stigskiptur stuðningur		
Sýnikennsla (MOD)	Kennsla námsaðferða (SUI)	Endurgjöf (FEED)
Að hvaða marki sýnir kennari hvernig skuli sinna viðfangsefni eða notar líkan til skilnings á ólíkum þáttum þess?	Kynnir kennarinn sveigjanlega námsaðferð sem unnt er að nota í margs konar samhengi?	Að hvaða marki veitir kennari endurgjöf á vinnu nemenda og leggur til leiðir fyrir þau til að bæta sig?

Stærðfræðikennsla á Íslandi

Í hæfniprepum Aðalnámskrár framhaldsskóla 2011 er lögð áhersla á miðlun í mæltu og rituðu máli, stærðfræðilega hugsun, lausn þrauta og verkefna, röksemdafærslur, gagnrýna og skapandi hugsun, áræðni, innsæi og frumleika við lausnir og stærðfræði sem nýtist í daglegu lífi og telst til almennrar menntunar. Einnig kemur fram í aðalnámskrá að allir grunnþættirnir eiga sér rætur í gagnrýninni hugsun og ígrundun (Mennta- og menningarmálaráðuneyti, 2012). Í eldri námskrá, *Aðalnámskrá framhaldsskóla 1999*, kemur eftirfarandi fram:

Kennsla í stærðfræði ætti að efla rökfasta hugsun en hún þarf einnig að efla hugkvæmni. Hún á að laða fram gagnrýna og greinandi hugsun hjá nemendum en einnig sjálfstraust, forvitni og löngun til að rannsaka og leita lausna á hinu óþekkta (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 1999, bls. 25)

Samkvæmt úttektarskýrslu um stærðfræðikennslu í framhaldsskólum á Íslandi (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014) eru ríkjandi kennsluhættir á þann veg að viðmið um hugsun, skilning, umræður og rökraður verða gjarnan út undan. Í mörgum tilvikum virðist áherslan vera á að nemendur læri tilteknar aðferðir til að leysa ákveðnar gerðir verkefna og algengt að hugur nemenda sé alls ekki við námið í kennslustundum. Almenn sé lítið gert til að styðja nemendur til skilnings á hugmyndum að baki reikniaðferðum. Í skýrslunni segir að áhersla á reikniaðferðir gangi í sumum skólanna „jafnvel svo langt að nemendum er fyrst og fremst kennt að leysa nokkrar gerðir af dæmum.“ (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014, bls. 36). Þetta samræmist niðurstöðum rannsóknar á kennsluaðferðum í 130 kennslustundum í íslenskum framhaldsskólum (Ingvar Sigurgeirsson o.fl., 2018). Þar kemur fram að flestar kennslustundir í stærðfræði fylgi ákveðnu mynstri. Í upphafi kennslustundar útskýrir kennarinn dæmi eða aðferð og síðan fara nemendur að reikna, oftast ein en stundum í samvinnu. Í greininni er einnig vakin athygli á að í þeim 14 stærðfræðikennslustundum sem voru greindar mátti aðeins finna eitt dæmi um þrautalausnaverkefni. Einnig vakti athygli rannsakenda hversu lítið skipulag var á hópvinnu og lítil áhersla á að virkja alla með markvissum hætti almennt séð. Því virðist sem raunveruleikinn í skólastofunum endurspegli einungis að takmörkuðu leyti áherslur aðalnámskrár.

Að mati stærðfræðikennara í framhaldsskólum á Íslandi er viðhorf nemenda til stærðfræði sjaldan jákvætt. Í úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum kom fram að nemendur eru oft hrædd við stærðfræði, þau skortir sjálfstraust og svo virðist sem búið sé að ala á því að stærðfræði sé bæði

leiðinleg og erfið. Þar kom einnig fram að kennarar upplifa að nemendum finnist erfitt að geta ekki leyst verkefnin strax, að þau séu ekki vön að þurfa að glíma við áskoranir í dálitla stund, en þó finnst sumum kennurum viðhorf nemenda sinna til stærðfræði að jafnaði gott (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014). Bent hefur verið á að í stærðfræðikennslu þar sem áhersla er lögð á að nemendur fylgi fyrirmælum og forskriftum án þess að hugsa um merkingu námsins eða tilgang, svíkjum við um bæði umhyggju fyrir stærðfræði og umhyggju fyrir nemendum (Ingólfur Gíslason, 2023).

Rannsóknir benda til að stærðfræðikennsla á unglingastigi fylgi svipuðu mynstri og í framhaldsskólum. Mikill tími fer í einstaklingsvinnu nemenda þar sem hlutverk kennarans er að aðstoða nemendur við að komast í gegnum dæmaskammtinn á kostnað samræðu um stærðfræðileg fyrirbæri (Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir, 2015; Þóra Þórðardóttir og Unnar Hermannsson, 2012). Slíkir kennsluhættir, sem sjást bæði í efri bekkjum grunnskólans og á framhaldsskólastiginu, teljast til hefðbundinna kennsluhátta (Skovsmose, 2001). Í slíku námsumhverfi reynist kennurum oft vandamt að viðhalda kröfum um rökhusun í kennslustundum og algengt er að kennarar dragi úr áskorun verkefna (Jóhann Örn Sigurjónsson og Berglind Gísladóttir, 2020).

Í myndbandsrannsókn þar sem stærðfræðikennsla á Íslandi var borin saman við stærðfræðikennslu í Finnlandi á efsta stigi grunnskólans kom fram að á Íslandi var sérstök áhersla lögð á einstaklingsmiðað nám (Savola, 2010). Samkvæmt Savola virtist þó einstaklingsmiðunin einungis felast í að nemendur hafi tækifæri til að vinna á eigin hraða. Nemendum var mestmegnis kennt með sömu kennsluaðferð og með sama námsefni og þannig horft fram hjá aðalatriðum einstaklingsmiðaðs náms, sem er samkvæmt Tomlinson (1999) að kennarinn þurfi að bregðast við þörfum sérhvers nemenda. Kennslustundirnar felast að mestu leyti í að kennari gengur um stofuna til að aðstoða einstaka nemendur, aðallega þau sem fara hægt í gegnum efnið. Stærðfræðikennslan breytist í kapphlaup þar sem nemendur reyna að komast eins hratt og þau geta frá A til B og kennarinn reynir að hjálpa þeim sem hlaupa hægst til að öll nái að lokum í mark, sem snýst gjarnan um að klára dæmaskammt vikunnar. Engin verðlaun eru fyrir að komast í mark en samt sem áður fer þetta kapphlaup fram á kostnað hugsunar, skilnings, umræðna og rökræðna. Einstaklingsmiðað nám á að veita nemendum rými til að skilja stærðfræði á eigin forsendum en ekki að fara í gegnum kennslubókina á eigin hraða. Til að það sé hægt er nauðsynlegt að breyta menningunni í skólastofunni.

Þegar rýnt var í þær átta kennslustundir í myndbandsgögnum QUINT sem sköruðu fram úr í hugrænni virkjun (e. cognitive activation) þvert á Norðurlöndin, þ.e. í undirþáttunum vitsmunaleg áskorun og samræður í skólastofunni, var ekkert eitt kennslusnið, svo sem einstaklingsvinna, hópvinna eða bekkjarumræður, sem einkenndi þær (Jóhann Örn Sigurjónsson, 2024). Þvert á móti áttu þær það sameiginlegt að ört var skipt á milli kennslusniða. Hefðbundin kennsla í formi innlagna og einstaklingsæfinga gat verið hluti kennslustunda en ávallt í stuttan tíma og í bland við önnur snið eins og hópvinnu og bekkjarumræður. Þá voru það gjarnan verkefni sem fólu í sér samvinnu nemenda og útskýringar til kennara og samnemenda um hugsun sína og skilning sem leiddu til tenginga milli stærðfræðilegra hluta eða aðferða. Í grein eftir Birnu Svanbjörnsdóttur, Sólveigu Zophoníasdóttur og Berglindi Gísladóttur (2023) er sjónum beint að endurgjöf í stærðfræði, meðal annars út frá kennslusniði. Í samræmi við aðrar rannsóknir var algengasta kennslusniðið einstaklingsvinna. Hins vegar var endurgjöf til nemenda metin af meiri gæðum í þeim fáu tilfellum þar sem nemendur unnu í para- eða hópavinnu, og þá sérstaklega í paravinnu. Í para- og hópavinnu sáust dæmi um að kennari gekk á milli hópa, spurði opinna spurninga og veitti nemendum tækifæri til að eiga í samræðum sín á milli um efnið. Svipaðar niðurstöður um kennslusnið birtast í grein Jóhanns Arnar Sigurjónssonar og Berglindar Gísladóttur (2020) þar sem fram kemur að það hafi sérstaklega verið í paravinnu nemenda sem vitsmunaleg áskorun var metin á efri þrepum, en einkum verið í einstaklingsvinnu sem kennari dró úr áskorun.

Vísbendingar eru um að stigskiptur stuðningur, svo sem í formi endurgjafar eða sýnikennslu, sé oft af minni gæðum í stærðfræðikennslu bæði á Íslandi og öðrum Norðurlöndum. Rannsókn Birnu, Sólveigar og Berglindar bendir til að í stærðfræðikennslu á Íslandi sé endurgjöf gjarnan í formi hróss og staðfestingar líkt og „flott“, „rétt“, „vel gert“ og svo framvegis. Þó sýndu niðurstöður einnig

dæmi um að endurgjöf var skýr, lögð var áhersla á skilning nemenda á efninu og greinileg merki um að endurgjöfin hjálpaði nemendum við verkefnið (Birna Svanbjörnsdóttir o.fl., 2023). Svipaðar niðurstöður fengust í rannsókn á kennslu 47 stærðfræðikennara í Noregi (Stovner og Klette, 2022). Kennarar reyndust eyða miklum tíma í að gefa endurgjöf þar sem að mestu leyti var lögð áhersla á að muna aðgerðir til að komast að réttu svari (aðgerðaskilning) en fá dæmi voru um endurgjöf sem lagði áherslu á hugtakaskilning. Sú endurgjöf sem var metin á efri þrepum var oftast tengd hugtakaskilningi. Í heildarniðurstöðum QUINT þvert á Norðurlöndin voru undirþættir stigskipts stuðnings, þ.e. endurgjöf, sýnikennsla og kennsla námsaðferða, sjaldan metnir á efri þrepum. Til að mynda var stærðfræðikennsla í um helmingi skólastofa á Íslandi og í Danmörku metin stöðugt á lægri þrepum endurgjafar og sýnikennslu (Klette o.fl., í prentun-b). Sýnikennsla og kennsla námsaðferða voru þó oftár á efri þrepum í stærðfræði í samanburði við fögin móðurmál og samfélagsfræði. Það eru sambærilegar niðurstöður og fengust í greiningu á kennslu 120 kennara yngri nemenda í Bandaríkjunum (Cohen, 2018).

Hugsandi skólastofa og innleiðingarskref hennar

Hugsandi skólastofa (Liljedahl, 2020, í prentun) snýst um að skapa rými þar sem hugsun er í fyrirrúmi, nemendur vinna saman að verkefnum sem eru hönnuð til að stuðla að skilningi nemenda á nýjum hugtökum og hugmyndum og leita skilnings í samræðum við samnemendur og kennara. Í útlistun á hvernig kennari byggir upp hugsandi skólastofu eru 14 atriði sem skipt er niður í fjögur innleiðingarskref. Kennarinn byrjar á fyrsta innleiðingarskrefinu og færir sig ekki í það næsta fyrr en tókum hefur verið náð á því fyrsta og svo koll af kolli. Í fyrsta innleiðingarskrefi eru gerðar róttækar breytingar sem fela í sér að leggja fyrir verkefni sem hvetja til hugsunar, skipta reglulega í sýnilega handahófskennda hópá og nemendur vinna við lóðréttá útstrokanlega fleti (t.d. tússtöflur). Með því móti skapast forsendur til að hefja innleiðingu nýrra viðmiða þar sem í auknum mæli er krafist hugsunar og rökræðna. Í öðru innleiðingarskrefi víkur kennari frá því að kennslustofan hafi eina framhlið, svarar einungis spurningum sem leiða til áframhaldandi hugsunar, leggur verkefni fyrir snemma, standandi og munnlega, gefur nemendum svokölluð kannaðu-eigin-skilning-verkefni og ýtir undir tilfærslu þekkingar í skólastofunni. Í þriðja innleiðingarskrefi viðheldur kennari flæði í verkefnavinnu nemenda með því að gefa þeim vísbendingar og útvíkanir eftir því sem við á, festir námsefnið í sessi gegnum umræður með öllum hópnum og nemendur skrifa merkingarbærar glósur. Loks í fjórða innleiðingarskrefi er leiðsagnarmat innleitt. Kennari upplýsir nemendur um hvar þau eru stödd og hvert þau stefna í náminu, í lokamati er einblínt á ferli frekar en lokasvör og endurgjöf til nemenda felur í sér mat á hvaða kunnáttu, getu og skilning nemandi hefur sýnt á ákveðnu tímabili.

Þegar kennari byrjar að byggja upp hugsandi skólastofu með nýjum nemendahóp vinna nemendur að þrautalausnum í handahófskenndum hópum og vinna við tússtöflur á veggjum. Þrautalausnirnar eru af stærðfræðilegum toga en tengjast ekki viðfangsefnum í námskrá á því skólastigi sem nemendur eru á. Þrautalausnir eru verkefni sem beita þarf rökhugsun og nemendur hafa ekki lært aðferð við að leysa. Dæmi um slíka þraut er:

Ef 6 kettir geta veitt 6 rottur á 6 mínútum, hve marga ketti þarf til að veiða 100 rottur á 60 mínútum? (Carroll, 1880)

Eftir þrjár til fimm kennslustundir af þrautalausnavinnu með aðferðum hugsandi skólastofu hafa gjarnan viðmið nemenda varðandi vinnubrögð og lausnarleit breyst. Síðan getur kennarinn byrjað að leggja fyrir nemendur námskrártengd verkefni úr námsáætlun án þess að gefa nemendum ákveðna lausnarleið fyrir fram. Námskrártengd verkefni eru þau verkefni sem tengjast þeirri þekkingu, leikni og hæfni sem finna má í námskrá á því skólastigi eða hæfniprepi sem nemendur eru stödd á. Kennari getur rífað upp fyrri þekkingu með nemendum og rætt þau atriði sem nauðsynlegt er

að nemendur þekki til að geta byrjað á fyrsta verkefninu. Kennarinn nýtir aðeins þrjár til fimm mínútur til að kynna verkefni áður en nemendur byrja að vinna. Mikilvægt er að fyrsta verkefnið sé aðgengilegt öllum nemendum. Síðan gefst tækifæri til að útvíkka verkefnið hægt og rólega. Næsta verkefni er annaðhvort að mestu óbreytt eða verkefni þar sem einum eiginleika er breytt. Smám saman geta nemendur fengið tilfinningu fyrir mynstri í verkefnaröðinni og áttað sig á eiginleikum sem eru markmið kennslunnar. Þetta er það sem Liljedahl (2024) kallar að skera námsefnið í þunnar sneiðar og byggir á breytileikakenningu náms (e. variation theory) (Marton og Tsui, 2004). Með vinnubrögðum sem þessum, þar sem ákveðin lausnarleið er ekki gefin upp fyrir fram, reynir virkilega á hugsun nemenda við að öðlast skilning á hugtökunum sem unnið er með (Liljedahl, 2020). Innlögnin á sér ekki stað í upphafi tímans heldur eftir að nemendur hafa fengið að glíma við þrautalausn. Í safngreiningu rannsókna á námsárangri kom í ljós að fyrir nemendur í 5. bekk og upp úr hafði það jákvæðari áhrif ef innlögn átti sér stað eftir þrautalausnavinnu nemenda heldur en í upphafi kennslustundar (Sinha og Kapur, 2021). Það bendir til að röð atburða í hugsandi skólastofu geti sérstaklega hentað nemendum í efri bekkjum grunnskóla og upp úr.

Aðferð

Rannsóknin er kerfisbundin eigindleg skólastofurannsókn sem felur einnig í sér sjónarhorn og sjálfsrýni kennara í anda starfendarannsókna. Gögnum var safnað í kennslustundum með einum nemendahóp í janúar árið 2024 í framhaldsskóla á höfuðborgarsvæðinu og gæði kennslunnar metin út frá greiningarramma PLATO. Kennarinn studdist við niðurstöður meðrannsakandans ásamt rökstuðningi hans á matinu við sjálfsrýnina. Í sjálfsrýninni lagði kennarinn mat á hvernig niðurstöðurnar samræmast hans sýn og markmiði kennslunnar út frá eigin reynslu og þekkingu á hugsandi skólastofu.

Þátttakendur

Þátttakendur rannsóknarinnar voru annars vegar kennarinn og hins vegar nemendahópurinn sem hann kenndi. Kennarinn hóf störf sem stærðfræðikennari árið 2020 og hefur unnið eftir hugmyndafræði hugsandi skólastofu frá vorönn 2022. Þegar gögnum var safnað vann hann eftir atriðum í fyrstu þremur af fjórum innleiðingarskrefum hugsandi skólastofu.

Ákveðið var að velja nemendahóp sem hafði áður kynnst kennslunálguninni hugsandi skólastofu hjá kennaranum. Rannsóknin fór fram í upphafi annar og því var ákveðið að meta gæðin í hugsandi skólastofu hjá nemendahóp sem var vanur fyrirkomulaginu en ekki hjá hóp sem væri enn að venjast slíku fyrirkomulagi. Nemendahópurinn sótti kennslustundirnar sem hluta af áfanga á þriðja þrepi *Aðalnámskrár framhaldsskóla 2011* þar sem fjallað var um heildun, deildajöfnur, runur og raðir. Kennarinn hafði kennt meirihluta nemendanna undanfara áfangans önnina á undan. Í vikunni sem rannsóknin fór fram voru nemendur að kynnst uppsetningu heilda ásamt tengingu þeirra við flatarmál.

Í hópnum voru 17 skráðir nemendur og í tímana mættu 13–14 nemendur. Nemendur voru á 17.–22. aldursári. Bæði nemendur og forráðafólk þeirra nemenda sem voru undir 18 ára aldri veittu upplýst samþykki fyrir þátttöku í kennslustundum sem til rannsóknar voru ásamt þeirri gagnasöfnun sem fylgdi rannsókninni. Einnig lá samþykki skólameistara framhaldsskólans fyrir áður en gagnaoöflun og úrvinnsla hófst. Í allri framsetningu niðurstæðna eru notuð gervinöfn.

Gagnaöflun

Gögnum var safnað yfir eina hefðbundna kennsluviku sem spannaði þrjár kennslustundir; eina 100 mínútna og tvær 50 mínútna samkvæmt stundatöflu. Markmiðið var að kennslan væri eins lík öðrum kennsluvikum kennarans eins og kostur var. Gagnasöfnun fól í sér hljóðupptökur af samskiptum

kennarans við nemendur úr hljóðnema sem kennarinn var með á sér. Meðrannsakandinn fylgdist með kennslustundunum, skráði niður framvindu þeirra og tók ljósmyndir af vinnu nemenda á töflum. Hljóðupptökur þessara þriggja kennslustunda voru afritaðar ásamt reglulegri tímaskráningu svo hægt væri að bera þær saman við glósur meðrannsakandans sem einnig innihéldu reglulega tímaskráningu.

Meðrannsakandinn kynnti fyrir kennaranum niðurstöður á þeim tíu undirþáttum PLATO sem meðrannsakandinn lagði mat á. Rökstuðningur meðrannsakandans fylgdi niðurstöðum (sjá nánar í greiningu gagna) sem kennarinn nýtti við sjálfsrýni. Kennarinn rýndi í niðurstöður út frá eigin þekkingu á hugsandi skólastofu og eigin fyrirkomulagi við kennslu. Með þessu sniði var stefnt á að styrkja trúverðugleika niðurstaðna sem tilvistarsönnun, vitandi að alhæfingargildi yrði lágt (Schoenfeld, 2007).

Greining gagna

Þrjár kennslustundir voru metnar samkvæmt greiningarramma PLATO af meðrannsakandanum sem hlotið hefur þjálfun og vottun í notkun hans. Kennslustundum er skipt í 15 mínútna hluta. Hver hluti er metinn eftir tólf undirþáttum PLATO sem hver og einn er á fjögurra punkta kvarða. Stundum er vísað í 1.-2. þrep sem neðri þrep og 3.-4. þrep sem efri þrep. Meðrannsakandinn gaf mat á tíu af tólf undirþáttum PLATO. Undirþættirnir sem ekki voru metnir voru *kennsla með textum* og *stuðningur við tungumálanám*. Kennsla með textum er aldrei metin í stærðfræðikennslu. Stuðningur við tungumálanám snýr að því hvernig kennari veitir nemendum með annað móðurmál aðstoð. Í þessari grein er fjallað um þá undirþætti PLATO sem tengjast yfirþáttunum faglegar kröfur og stigskiptur stuðningur. Ákveðið var að greinin myndi fjalla um þessa yfirþætti áður en gagnaöflun fór fram. Að mati höfunda hefði reynst erfitt að fjalla um alla tíu undirþættina í einni og sömu greininni. Ástæða þess að þessir tveir yfirþættir voru valdir var að höfundar vildu leggja áherslu á þá þætti sem tengjast hvað mest efni kennslustundanna, fremur en almennari þætti á borð við tímastjórnun eða tilgang.

Faglegar kröfur samanstanda af samræðum í skólastofunni og vitsmunalegri áskorun. Greiningarviðmið fyrir samræður í skólastofunni hafa tvö viðmið: CD1 sem stendur fyrir viðbrögð (e. uptake) við svörum nemenda og CD2 sem stendur fyrir tækifæri nemenda til samræðna (sjá *Töflu 2*). Heildarskor samræðna í skólastofunni er meðaltal þessara tveggja undirþátta, þar sem CD1 vegur þyngra ef námundunar er þörf. Í *Töflu 2* má sjá stytta lýsingu á greiningarviðmiðum PLATO fyrir samræður í skólastofunni og vitsmunalega áskorun. Í greiningu á vitsmunalegri áskorun geta athugasemdir eða spurningar kennarans til nemenda valdið hækkun eða lækkun um eitt þrep eftir því hvort aukið er á eða dregið úr þeim kröfum sem felast í viðfangsefni eða verkefni.

Tafla 2

Greiningarviðmið fyrir faglegar kröfur, þ.e. samræður í skólastofunni og vitsmunalega áskorun (stytt ljúsing)

	Samræður í skólastofunni (CD1: Viðbrögð)	Samræður í skólastofunni (CD2: Tækifæri)	Vitsmunaleg áskorun (IC)
1. þrep (nánast engin dæmi)	Kennari eða nemendur bregðast sjaldan eða aldrei við hugmyndum nemenda um námsefnið. Svör kennara staðfesta eða endurtaka framlag nemenda (t.d. einmitt, gott, takk) án þess að biðja um skýringar eða frekari rökstuðning.	Fá eða engin tækifæri eru fyrir nemendur til að ræða um námsefnið. Á þetta þrep falla einnig eftirfarandi: Fyrirlestrar kennara, ítarlegar kynningar á verkefnum, kunnáttusurningar með svörum nemenda – sem standa skemur en 5 mínútur.	Kennari leggur fyrir verkefni eða viðfangsefni sem byggjast nánast eingöngu á minnisatriðum og utanbókarnámi.
2. þrep (fá dæmi)	Kennari eða nemendur bregðast stuttlega við hugmyndum nemenda og svör þeirra skýra efnið ekki betur, né hjálpa til við að þróa þær – eða að kennarinn svarar með sjálfgefnum svörum en stökum afmörkuðum dæmum sem reyna á krefjandi hugsun.	Samræðan er mjög kennarastýrð, en nemendur fá stöku tækifæri til að ræða námsefnið. Dæmi eru spurningar kennara og svör nemenda sem taka 5 mínútur eða lengur, eða samræða (í öllum nemendahópnum, minni hópum eða pörum) um námsefnið sem stendur skemur en í 5 mínútur.	Kennari leggur fyrir verkefni eða viðfangsefni sem byggjast að mestu á minnisatriðum og utanbókarnámi, en lítill hluti viðfangsefnanna kallar á greiningu, túlkun, ályktanir eða hugmyndasköpun.
3. þrep (dæmi, en einhverjir hnökrar)	Framlag kennara og nemenda er að jöfnu stutt svör og merki um djúpan skilning. Sjá má mörg dæmi þar sem kennari eða nemendur ræða sérstaklega hugmyndir nemenda.	Kennarinn gefur tækifæri fyrir að minnsta kosti 5 mínútna samræðu um námsefnið. Nokkrir nemendur taka þátt en aðeins 2–3 nemendur eru í aðalhlutverki. Kennarinn stýrir umræðum að stórum hluta. Sumar spurningar eru opnar.	Kennari leggur fyrir viðfangsefni sem eru mismunandi hvað varðar kröfur um rökhusun: Flest kalla á greiningu, túlkun, ályktanir eða hugmyndasköpun en nokkur beinast að minnisatriðum eða utanbókarnámi.
4. þrep (stöðug, skýr dæmi)	Kennari eða nemendur eiga í stöðugum, uppbyggjandi og djúpum samræðum sem byggjast á hugmyndum nemenda, og svör útvíkka hugmyndir þeirra eða auðvelda þeim að útskýra mál sitt betur og gera grein fyrir hugsun sinni.	Kennari gefur tækifæri fyrir a.m.k. 5 mínútur samræðu um námsefnið. Meirihluti nemenda tekur þátt og nemendur ræða saman sín á milli, jafnvel þó kennari stjórni samræðunum. Spurningar umræðunnar eru flestar opnar, umræðuefnið skýrt og umræðan markviss.	Kennari leggur fyrir krefjandi viðfangsefni sem flest reyna á greinandi hugsun og ályktunarhæfni, meðal annars að taka saman og leggja mat á upplýsingar og/eða rökstyðja svör eða afstöðu (Grossman, 2015).

Stigskiptur stuðningur samanstendur af sýnikennslu, kennslu námsaðferða og endurgjöf. Sýnikennsla nær yfir það að hvaða marki kennari sýni nemendum hvernig skuli sinna viðfangsefni eða noti líkan (e. model) til að brjóta niður ólíka þætti þess. Kennsla námsaðferða tekur til þess hvort eða hvernig kennarinn kynnir sveigjanlega námsaðferð sem unnt er að nota í margs konar samhengi. Dæmi um námsaðferðir í skilgreiningu PLATO er einn-fleiri-allir eða skýrt afmarkaðar glósuaðferðir. Endurgjöf snýst um að hvaða marki kennari veiti efnislega endurgjöf um vinnu nemenda og leggi til leiðir fyrir þau til að bæta sig. Í *Töflu 3* má sjá stutta lýsingu á greiningarviðmiðum undirþátta stigskipts stuðnings út frá greiningarhandbók PLATO.

Tafla 3

Greiningarviðmið fyrir stigskiptan stuðning, þ.e. sýnikennslu, kennslu námsaðferða og endurgjöf (stytt lýsing)

	Sýnikennsla (MOD)	Kennsla námsaðferða (SUI)	Endurgjöf (FEED)
1. þrep (nánast engin dæmi)	Kennarinn sýnir ekki þær aðferðir, leikni eða ferli sem kennslustundin snýst um. Ef líkan er til staðar er það ekki útskýrt eða notað til að leiðbeina nemendum við verkefnið.	Kennarinn hvorki vísar til námsaðferða né veitir kennslu um þær.	Kennarinn veitir nemendum enga endurgjöf.
2. þrep (fá dæmi)	Kennarinn sýnir hluta þeirra aðferða, leikni eða ferla sem kennslustundin beinist að, en sýnikennslan er ófullkomin, beinist aðeins að nokkrum nemendum, er ónákvæm eða óskýr – eða kennarinn vísar til líkans án þess að sýna það.	Kennarinn vísar að a.m.k. einni námsaðferð – eða kennarinn hvetur nemendur til að beita námsaðferðum án sérstakrar kennslu um þær.	Kennari og/eða nemendur veita endurgjöf sem er óljós, endurtekningarsöm, yfirborðsleg eða misvísandi (t.d. vel gert, rétt, nei) og tengist fremur því hvernig miðar við verkefnið en skilningi nemenda á því.
3. þrep (dæmi, en einhverjir hnökrar)	Kennarinn sýnir með skýrum og ítarlegum hætti þær aðferðir, leikni eða ferli sem kennslustundin beinist að. Sýnikennslan tekur til allra þátta og nýtist flestum nemendum – eða kennarinn notar slíkt líkan til að styðjast við.	Kennarinn kennir með skýrum, en takmörkuðum hætti, um tiltekna námsaðferð, ásamt hvernig eigi að nota hana.	Kennari og/eða nemendur veita einhverja endurgjöf sem tengist ákveðnum þáttum í vinnu eða hugmyndum nemenda. Endurgjöfin er uppbyggjandi og skýr og tengist hvort tveggja því hvernig verkefninu miðar og skilningi nemenda á því.
4. þrep (stöðug, skýr dæmi)	Kennarinn sýnir með skýrum og ítarlegum hætti þær aðferðir, leikni eða ferli sem kennslustundin beinist að. Sýnikennslan tekur til allra þátta, nýtist flestum nemendum og brýtur til mergjar ákveðna þætti, svo sem til að skýra hvernig og hvers vegna – eða kennarinn styðst við slíkt líkan með sama hætti.	Kennarinn kennir með skýrum og nákvæmum hætti um eina eða fleiri námsaðferðir, þar með talið um hvernig, hvers vegna eða hvenær eigi við að nota þær.	Kennari og/eða nemendur veita stöðuga og ákveðna endurgjöf sem tengist öðru fremur skilningi nemenda. Flest bendir til þess að endurgjöfin nýtist nemendum vel við verkefnið. (Grossman, 2015)

Þegar mat á kennslustundunum lá fyrir kynnti meðrannsakandinn niðurstöðurnar fyrir kennaranum ásamt að kennarinn fékk í hendurnar skjal með rökstuðningi meðrannsakandans á mati hvers undirþáttar í PLATO fyrir alla 15 mínútna hlutana. Jafnframt afhenti meðrannsakandinn kennaranum afritun af hljóðupptökunum þar sem samskipti milli kennarans og nemenda voru litamerkt eftir undirþáttum PLATO. Kennarinn rýndi í rökstuðninginn og litamerktu afritunina og ígrundaði út frá eigin þekkingu og reynslu á hugsandi skólastofu.

Fyrirkomulag kennslunnar

Fyrsta kennslustund var 100 mínútur samkvæmt stundatöflu og stóð yfir í tæplega 90 mínútur. Fyrstu 50 mínúturnar unnu nemendur í handahófskenndum tveggja til þriggja manna hópum, standandi við tússtöflur á veggjunum. Hver hópur hafði einn tússpena. Nemendur unnu að verkefnum sem kennarinn kynnti munnlega eitt og eitt í einu. Þegar hópur kláraði verkefni fékk hann það næsta. Allir hópar voru byrjaðir að vinna þegar rúmlega þrjár mínútur voru liðnar af tímanum. Kennarinn kynnti eftirfarandi verkefni munnlega og skrifaði á tússtöflu það sem er innan hornklofa:

- Teiknið upp fallið $f(x) = -2x + 10$ án þess að nota GeoGebru.
- Finnið flatarmál svæðisins undir ferlinum $f(x)$ að x -ásnum á bilinu $[x = 1]$ að $[x = 4]$ án þess að nota heildun.
- Finnið flatarmál sama svæðis en nú með heildun.
- Nú megið þið nota GeoGebru til að hjálpa ykkur að teikna föllin. Teiknið upp og finnið með heildun flatarmál svæðisins sem afmarkast af:
 - o $[f(x) = 3 + 2x - x^2, y\text{-ás og } x\text{-ás}]$
 - o $[g(x) = 4e^{0,2x}, x\text{-ás, } x = 2 \text{ og } x = 6]$
 - o $[h(x) = 5\sqrt{x}, x\text{-ás, } x = 0 \text{ og } x = 3]$

Eftir hópavinnuna leiddi kennarinn 7 mínútna hópumræðu um sameiginlega reynslu úr verkefnavinnunni. Kennarinn fékk nemendur til að standa í kringum auða tússtöflu. Hópumræðan fjallaði um tengingu heildunar falla við flatarmál svæða sem föllin mynda. Kennarinn byggði umræðuna að mestu leyti á spurningum sem nemendur svöruðu og kennarinn brást við. Í kjölfarið settust nemendur í sæti að eigin vali og fengu tækifæri til að skrifa eigin glósur út frá því sem unnið var með í tímanum. Að því loknu unnu þau verkefni úr kennslubók sem svipaði til síðustu verkefna í hópavinnunni. Glósuvinna og verkefnavinna í bók tóku um 30 mínútur og þar með lauk tímanum.

Önnur kennslustund var 50 mínútna löng. Fyrstu 21 mínútuna unnu nemendur í hópum við tússtöflur líkt og í fyrsta tímanum. Markmið kennarans í þessum hluta var að hjálpa nemendum að skilja betur tengingu heildunar við þau svæði sem fall myndar á grafi og hvernig sú vitneskja nýtist til að finna svæði milli tveggja falla. Verkefnin fólust í að finna flatarmál milli tveggja línulegra falla án þess að nota heildun og leikreglurnar voru þær að aðeins mátti finna flatarmál á milli x -áss og falls. Kennarinn kynnti leikreglurnar og fyrsta verkefnið á um tveimur mínútum og voru allir hópar byrjaðir að vinna innan við fimm mínútur eftir að kennslustundin hófst. Kennarinn kynnti eftirfarandi verkefni munnlega og skrifaði á tússtöflu það sem er innan hornklofa:

- Finnið flatarmálið milli ferlanna
 - o $[y = 5, y = 3]$ á bilinu $[x = 2 \text{ og } x = 5]$
 - o $[f(x) = 5, g(x) = x]$ á bilinu $[x = 0 \text{ og } x = 5]$
 - o $[f(x) = 2, g(x) = -3]$ á bilinu $[x = 2 \text{ og } x = 5]$

Eftir verkefnavinnuna leiddi kennarinn hópumræðu með svipuðu sniði og í fyrsta tímanum í um 6 mínútur. Markmið kennarans með hópumræðunni var að hjálpa nemendum að átta sig á hvernig leikreglurnar í verkefnavinnunni tengjast vinnubrögðum við að finna flatarmál milli tveggja falla með heildun. Í kjölfarið leystu nemendur dæmi úr bókinni í sætunum í um 20 mínútur eða þar til tíminn kláraðist. Verkefnin fólust í að finna flatarmál svæðis milli tveggja falla með heildun.

Þriðja kennslustund var 50 mínútna löng. Í þeim tíma unnu nemendur í svokölluðu tímaverkefni sem gildi til lokaéinkunnar. Nemendum var skipt í sýnilega handahófskennda tveggja til þriggja manna hópa og hver hópur fékk eitt verkefni á blaði og einn tússpenna. Hóparnir unnu verkefnið standandi við tússtöflurnar og hreinskrifuðu lausn á verkefnablaðið. Hver hópur skilaði einu verkefnablaði. Einkunn var ekki gefin fyrir rétt og röng svör heldur fyrir hversu vel hópurnir vann saman og var það kynnt fyrir nemendum í upphafi. Verkefnið reyndi á leikni í heildun og tengingu við flatarmál. Finna má tímaverkefnið í viðauka A.

Niðurstöður

Niðurstöður eru settar fram í tveimur undirköflum. Fyrst eru kynntar niðurstöður á greiningu meðrannsakandans um faglegar kröfur, þ.e. samræður í skólastofunni og vitsmunalega áskorun. Síðan eru kynntar niðurstöður á greiningu meðrannsakandans um stigskiptan stuðning, þ.e. kennslu námsaðferða, endurgjöf og sýnikennslu. Í þessum hluta undirkafla er ritað um kennarann í 3. persónu. Báðum undirköflum lýkur með sjálfsrýni kennarans (í 1. persónu) um niðurstöður þessara kennslustunda.

Greining meðrannsakandans á faglegum kröfum: Samræður í skólastofunni og vitsmunaleg áskorun

Í *Töflu 4* eru settar fram niðurstöður PLATO-greiningar um samræður í skólastofunni og vitsmunalega áskorun. Einnig kemur fram hvaða kennslusnið einkenndi hvern hluta kennslustundarinnar, t.d. hópvinna eða einstaklingsvinna. Niðurstöður eru settar fram samkvæmt greiningu 15 mínútna hluta á fjögurra punkta kvarða PLATO, þar sem 1 er lágt og 4 er hátt.

Tafla 4

Niðurstöður PLATO-greiningar í undirþáttunum samræður í skólastofunni og vitsmunaleg áskorun

Kennslustund	Hluti	CD1	CD2	CD-allt	IC	Kennslusnið
1	1	4	4	4	4	Hópvinna (á töflum)
	2	4	4	4	4	
	3	4	4	4	4	
	4	4	3	4	2	Hópumræða (í bland við önnur)
	5	3	2	3	4	Einstaklingsvinna (í sætum)
	6	3	2	3	3	
2	1	3	4	3	3	Hópvinna (á töflum)
	2	4	4	4	3	Hópumræða (í bland við önnur)
	3	3	2	3	3	Einstaklingsvinna (í sætum)
3	1	4	4	4	4	Hópvinna (á töflum)
	2	4	4	4	4	
	3	4	4	4	4	

Samræður í skólastofunni voru stöðugt metnar á 3. og 4. þrepi. Það þýðir að stærstur hluti nemenda tók beinan þátt í stöðugri og djúpri samræðu um viðfangsefni kennslustundanna, beittu virkri hlustun og svöruðu hvert öðru. Rökstuðningur meðrannsakandans fyrir því að meta viðkomandi hluta á 4. þrepi var að í samtölum við nemendahópa byggði kennarinn samræðuna ítrekað á svörum nemenda og gaf þeim tækifæri til að útskýra eða segja nánar frá. Einnig höfðu nemendur í þessum hljóðupptökum meira en 5 mínútur af hverjum 15 tækifæri til að ræða saman og beita virkri hlustun þar sem flest nemendanna tóku þátt.

Í þremur hlutum af tólf sátu nemendur í sætum og unnu sjálfstætt eða með sessunautum að því að leysa verkefni úr kennslubók. Það er einnig í þessum þremur hlutum sem samræður í skólastofunni voru metnar á 3. þrepi. Rökstuðningur meðrannsakandans var að fyrir komu samræður milli kennarans og einstakra nemenda og stundum nokkurra nemenda saman sem byggðu gjarnan á spurningum nemenda og kennarinn bað nemendur stundum að útskýra nánar hvað þau áttu við. Viðbrögð kennarans við hugmyndum nemenda voru því til staðar, en ekki í sama mæli og þegar nemendur unnu standandi við töflurnar í litlum hópum.

Ýmis dæmi stuðluðu að því að samræður í skólastofunni voru metnar á 4. þrepi. Til að mynda byggði kennarinn samræður við nemendur á þeirra framlagi og hvatti nemendur til að ræða saman, segja nánar frá eigin hugsun eða að útskýra með eigin orðum. Nemendur reiknuðu ákveðna heildið $\int_0^1 -2x^3 + 3\sqrt{x} \, dx$ og áttu að túlka niðurstöðuna í litlum hópum við töflurnar og kennarinn steig inn í vinnu nemenda.

Kennari: Má ég aðeins detta inn hérna?

Unnur: Já.

Kennari: Hvernig sáuð þið að stofnfallið af þessum hluta var $2x^{1,5}$? Er það eitthvað sem er auðvelt að sjá eða?

Unnur: Já er það ekki bara? x í rót er $x^{0,5}$.

Kennari: Okei.

Unnur: Og þá bætum við einum við það [veldið]. Og síðan þurfum við bara að, hvaða tala margfölduð með 1,5 verður 3.

Mía: Já.

Kennari: Eruð þið að skilja hvernig Unnur er að útskýra þetta?

Mía: Já.

Vitsmunaleg áskorun var metin á 2., 3. og 4. þrepi. Af þeim sjö hlutum þar sem nemendur unnu standandi við tússtöflur í litlum hópum var vitsmunaleg áskorun metin á 4. þrepi í sex þeirra og í einum hluta á 3. þrepi. Rökstuðningur meðrannsakandans á þeim sjö hlutum sem metnir voru á 4. þrepi var á þann veg að meirihluti tímans fór í virka vinnu nemenda, verkefnin kröfðust greinandi hugsunar og kennarinn bað nemendur um rökstuðning eða útskýringar með hinum ýmsu spurningum sem kröfðu nemendur um meira en verkefnið eitt og sér gerði. Dæmi um slíkar spurningar voru:

- Af hverju vitið þið að þetta [grafið] lítur svona út?
- Hvernig vitið þið þetta allt? Og hvernig gætuð þið sýnt útreikninga í kringum það?
- Af hverju er $3x$ hér?
- Af hverju verður þetta stofnfallið af þessu?
- Af hverju virkar það?
- Af hverju haldið þið að þetta sé rangt?
- Hvernig sáuð þið að stofnfallið af þessum hluta var $2x^{1,5}$?
- Hvað þýðir þessi niðurstaða?
- En af hverju kemur þetta út sem mínustala?

Einnig nefnir meðrannsakandinn í einum hluta að kennarinn bað nemendur um að útskýra fyrir hvert öðru, bæði innan hóps og milli hópa.

Í þeim fjórum hlutum þar sem vitsmunaleg áskorun var metin á 3. þrepi voru helstu rök meðrannsakandans að krafa kennarans um rökstuðning og útskýringar frá nemendum hefði ekki verið jafn mikil og í þeim hlutum sem metnir voru á 4. þrepi. Í þeim hluta sem vitsmunaleg áskorun var metin á 2. þrepi voru rök meðrannsakandans að minnihluti þessara 15 mínútna fór í virka vinnu þar sem krafist var mikillar hugsunar af þeirra hálfu.

Sjónarhorn og sjálfsrýni kennarans um faglegar kröfur

Í mínum skilningi snýst hugsandi skólastofa í sinni einföldustu mynd um að hvetja nemendur til að hugsa í gegnum samræður við samnemendur og kennara. Að samræður í skólastofunni og vitsmunaleg áskorun hafi almennt verið metin hátt er því ágætis staðfesting á að grunnatriði hugsandi skólastofu hafi náðst hjá þessum tiltekna nemendahóp. Það var ánægjulegt þegar meðrannsakandinn kynnti fyrir mér að samræður og vitsmunaleg áskorun hefðu almennt verið metin hátt. Ég hef lagt mikla vinnu frá vorönn 2022 að móta mína kennslu út frá hugmyndafræði hugsandi skólastofu. Það hefur alls ekki alltaf gengið vel en þrátt fyrir það hef ég haldið áfram að þróa þessa kennslunálgun hjá mér. Í þessum tiltekna hóp sem rannsóknin fjallar um upplifði ég menningu þar sem nemendur voru tilbúin að fara í þann hóp sem þau drógu sig í og voru tilbúin að glíma við krefjandi verkefni í sameiningu. Þau voru tilbúin að prófa sig áfram og ræða saman um ólíkar leiðir. Það var ákveðinn léttir að greiningarrámmi PLATO endurspegli mína upplifun að vissu leyti varðandi samræður og vitsmunalega áskorun.

Eitt af því sem mér hefur þótt hvað mest krefjandi við innleiðingu á hugsandi skólastofu eru fyrstu dagarnir og vikurnar þegar nemendur hafa ekki vanist breyttum kennsluháttum. Flest nemenda eru vön hefðbundnari kennsluháttum í stærðfræði og finnst því eðlilega mörgum þeirra óþægilegt að vinna eftir gjörbreyttum kennsluháttum sem krefjast mikils af nemendum, bæði félagslega og vitsmunalega. Hugmyndafræðin á bakvið hugsandi skólastofu gerir ráð fyrir að í flestum skólastofum séu nemendur vön hefðbundinni kennslu og séu því vön ákveðnum viðmiðum um hvernig stærðfræðikennsla líti út. Skrefin í hugsandi skólastofu eiga að hjálpa kennaranum að brjóta niður þessi viðmið til þess að eiga möguleika á að byggja ný viðmið með nemendum. Niðurstöðurnar benda til að það hafi tekist að koma á viðmiðum þar sem nemendur eiga í samræðum um námsefnið við hvert annað og hugsa um stærðfræðitengd verkefni sem reyna á margræða og greinandi hugsun; að samræður og vitsmunaleg áskorun séu hluti af því að læra nýtt námsefni. Þegar tekist hefur að koma á slíkum viðmiðum verður kennslan að mínu mati ótrúlega skemmtileg. Þá breytist starfið úr því að mata nemendur og reyna að hvetja þau áfram yfir í að fylgjast með nemendum glíma við krefjandi verkefni í sameiningu og uppgötva nýja hluti og tengingar innan stærðfræðinnar. Kennarinn fær það hlutverk að beina nemendum í rétta átt án þess að gefa of mikið upp og gefur þannig nemendum tækifæri til að finna út úr hlutunum á eigin forsendum.

Það er áhugavert að velta fyrir sér hvaða einkenni hugsandi skólastofu stuðluðu að því að samræður í skólastofunni og vitsmunaleg áskorun voru metin á efri þrepum. Þegar ég rýni í gögnin frá meðrannsakandanum tek ég eftir að einn veigamesti þátturinn var hvernig ég svaraði og spurði nemendur spurninga. Þegar nemendur spyrja mig spurninga þar sem þau vilja fá staðfestingu á hvort þeirra vinna sé rétt þá reyni ég að svara með spurningum líkt og: „Eruð þið að fá sömu niðurstöðu og aðrir hópar?“ Ég segi líka oft við nemendur að ég viti ekki svarið. Þá þurfa þau að útskýra þeirra lausnarleið og rökstyðja af hverju þau halda að þetta sé rétt lausn. Þetta er í takt við hugmyndafræði hugsandi skólastofu um að kennari svari einungis spurningum sem leiða til áframhaldandi hugsunar. Einnig gerðist það ítrekað að ég steig inn í vinnu hóps og bað nemendur um að útskýra og rökstyðja hugsunarhátt hópsins til að viðhalda flæði í verkefnavinnu nemenda. Samkvæmt gögnum frá meðrannsakandanum jók það erfiðleikastig verkefna en einnig hjálpaði það mér sem kennara að átta mig á hvort allir í hópnum skildu það sem var að gerast og gat ég þá aðstoðað ef þörf var á. Eftir að hafa rýnt í afritunina af hljóðupptökunum tek ég eftir að stundum lét ég duga að spyrja hópmeðlimi

hvort þau skildu ákveðin atriði en hefði getað beðið um útskýringu til að fullvissa mig um skilning þeirra.

Greining meðrannsakandans á stigskiptum stuðningi: Kennsla námsaðferða, endurgjöf og sýnikennsla

Í Töflu 5 eru niðurstöður PLATO-greiningar fyrir undirþætti stigskipts stuðnings. Þar er einnig sett fram eftir hvaða sniði nemendur unnu í sérhverjum hluta kennslustundar sem metinn var.

Tafla 5

Niðurstöður PLATO-greiningar í undirþáttunum sýnikennsla (MOD), kennsla námsaðferða (SUI) og endurgjöf (FEED)

Kennslustund	Hluti	MOD	SUI	FEED	Kennslusnið
1	1	2	2	2	Hópvinnna (á töflum)
	2	2	2	3	
	3	3	2	3	
	4	4	4	2	Hópumræða (í bland við önnur)
	5	2	4	2	Einstaklingsvinna (í sætum)
	6	2	3	2	
2	1	2	1	2	Hópvinnna (á töflum)
	2	4	2	2	Hópumræða (í bland við önnur)
	3	3	2	2	Einstaklingsvinna (í sætum)
3	1	1	2	3	Hópvinnna (á töflum)
	2	2	2	2	
	3	1	3	3	

Kennsla námsaðferða var metin á öllum fjórum þrepunum. Í þeim tveimur hlutum sem metnir voru á 4. þrepi var, að mati meðrannsakandans, skýr kennsla sem var nákvæm og innihélt ekki aðeins hvernig á að skrifa stærðfræðilegar úrlausnir heldur var rætt um hvert skref ferlisins. Einnig var útskýrt hvernig námsaðferðum er beitt, og að vissu marki var komið inn á hvenær og af hverju þeim er beitt.

Eftirfarandi er dæmi um atriði sem meðrannsakandinn merkti hjá sér sem vísbendingu að kennslu námsaðferða á 4. þrepi. Kennarinn leiddi umræðu með öllum nemendahópnum og talaði um atriði sem mikilvægt er að nemendur áttuðu sig á:

Kennari: Þannig þetta er þetta svæði sem þetta hérna heildi er að gefa okkur. Þannig þetta er alltaf svo mikilvægt, bæði ef við fáum eitthvað heildi þá verðum við að geta túlkað, hvaða svæði er það, og ef við fáum svæði þá verðum við að geta sett upp heildið. Við þurfum að kunna að fara í báðar áttir.

Kennarinn útskýrir þá námsaðferð að túlka heildi sem svæði undir ferli, og svæði undir ferli sem heildi, og hvenær eigi við að nota hana – þegar heildi er gefið eða ef svæði undir ferli er gefið.

Í þeim tveimur hlutum sem kennsla námsaðferða var metin á 3. þrepi var skýr kennsla sem var

nákvæm en áherslan var fremur á hvernig á að nota námsaðferð, en ekki af hverju hún er eins og hún er. Dæmi um þetta er þegar kennarinn kynnti fyrir nemendahóp námsaðferð við að sannreyna útkomu úr heildisreikningi með því að horfa á rúður fyrir flatarmálseiningar í hnitakerfi:

Kennari: Þið getið líka skoðað svæðið, hvaða svar meikar sens miðað við rúðurnar? Hvaða kassi er einn heill? Ef þið búið til ferning sem er 1 sinnum 1, skiljið þið, einn hingað og einn hingað. Þá er þetta ein flatarmálseining. Meikar þá sens að þetta sé 1,5 hér?

Þó þessi kennsla hafi verið nákvæm og komið að hluta inn á hvenær má beita þessum námsaðferðum og hvers vegna, þá mat meðrannsakandinn það þannig að það hafi ekki verið farið í næg smáatriði við skref þeirra á þann hátt að það uppfyllti skilyrði 4. þreps.

Í þeim sjö hlutum sem kennsla námsaðferða var metin á 2. þrepi var kennarinn að vísa í ákveðnar námsaðferðir en hvorki var útskýrt hvernig hún er notuð eða af hverju. Í þeim eina hluta þar sem kennsla námsaðferða var metin á 1. þrepi vísaði kennarinn ekki til námsaðferðar né átti sér stað bein kennsla.

Endurgjöf var metin ýmist á 2. eða 3. þrepi. Í öllum fjórum hlutum þar sem endurgjöf var metin á 3. þrepi unnu nemendur standandi við tússtöflur í litlum hópum. Í þessum fjórum hlutum voru tvö til þrjú tilvik um sértæka endurgjöf sem tengdist efnislegri vinnu nemenda. Í eftirfarandi dæmi höfðu nemendur leyst heildi en kennarinn benti á rithátt sem vantaði upp á í vinnu nemenda.

Kennari: Já, setjum einn og fjóra á hornklofann og þá lítur þetta ótrúlega vel út.

Í næsta dæmi hér að neðan benti kennarinn á það sem var vel gert í vinnu nemenda. Nemendurnir voru að leysa ákveðin heildi á forminu $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Kennarinn hafði upplifað að oft settu nemendur ekki sviga utan um stæðuna $F(a)$ en í þessum tiltekna hóp settu nemendur bæði sviga utan um $F(a)$ og $F(b)$:

Kennari: Akkúrat, og það getur hjálpað rosa mikið að setja sitthvort í sviga. Það er einmitt mjög gott.

Einnig eru dæmi þar sem kennarinn gaf sértæka endurgjöf með því að biðja nemendur um að bæta við milliskrefum til að útskýra útreikninga þeirra betur.

Í þeim átta hlutum sem endurgjöf var metin á 2. þrepi var eitthvað um stuttlega (1–2 orða) endurgjöf, svo sem „einmitt“, og „nákvæmlega“. Algengt var að kennarinn spyrði nemendur spurninga sem gáfu í skyn tillögur að næstu skrefum, en ekki var um að ræða endurgjöf tengda vinnu nemenda, svo sem þá sem miðar að því að hjálpa nemendum að koma auga á styrkleika eða veikleika í vinnu sinni eða hugmyndum/úrlausnum. Endurgjöfin var ekki metin þannig að hún aðstoðaði nemendur við áframhaldandi nám. Til að vera á 4. þrepi hefði endurgjöfin þurft að vera í auknum mæli miðuð að skilningi nemenda og nýtast þeim við námið með því að endurskoða og bæta úrlausnir sínar.

Sýnikennsla var metin á öllum fjórum þrepunum. Í þeim tveimur hlutum sem metnir voru á 4. þrepi fólst tæplega helmingur hlutans í hópumræðu með öllum hópnum en hluta tímans unnu nemendur sitjandi og standandi við töflur. Í þessum tveimur hlutum var sýnikennslan skýr og aðgengileg öllum nemendum sem þurftu á henni að halda til að leysa verkefni í kennslustundinni. Kennarinn útskýrði hugsunina á bakvið hvert skref í ferlinu með áherslu á hvernig og hvers vegna.

Í þeim tveimur hlutum sem sýnikennsla var metin á 3. þrepi var lausnarferlið vel útskýrt og gert aðgengilegt nemendum. Til að vera á 4. þrepi þyrfti sýnikennslan að sýna meira en að nota aðferð til að leysa verkefni, heldur að skipta ferlinu í tiltekin undirferli eða útskýra nánar hvernig og af hverju sýnidæmið gagnast. Í þeim sex hlutum sem sýnikennsla var metin á 2. þrepi kom einungis fram hluti af námsaðferð eða ferli og kennslan því ekki metin nógu heildstæð, skýr eða aðgengileg öllum nemendum. Í þeim tveimur hlutum sem sýnikennsla var metin á 1. þrepi var engin sýnikennsla.

Sjónarhorn og sjálfsrýni kennarans um stigskiptan stuðning

Þegar meðrannsakandinn kynnti fyrir mér niðurstöður undirþátta stigskipts stuðnings fann ég að matið var hvorki framúrskarandi né lélegt. Það sem kom mér helst á óvart var að endurgjöf hafi ekki komið betur út. Af minni reynslu af hugsandi skólastofu upplifi ég góð tækifæri til að gefa nemendum endurgjöf, sérstaklega þegar nemendur vinna í litlum hópum við tússtöflurnar. Ég sem kennari hef góða yfirsýn á vinnu nemenda og ég hef tíma til að stíga inn í vinnu allra hópanna ítrekað, sem oft er ómögulegt þegar nemendur vinna sjálfstætt. Endurgjöfin var almennt betri þegar nemendur unnu í litlum hópum við tússtöflurnar sem styður upplifun mína á þeim tækifærum sem gefast í því kennslusniði. Samkvæmt gögnum meðrannsakandans var endurgjöfin oft stutt og einungis á formi hróss til nemenda en hefði þurft að veita nemendum tækifæri til að bæta eigin vinnu. Ég hélt áður að ég væri að veita nemendum góða endurgjöf en þessi rannsókn gefur mér tækifæri til að endurhugsa endurgjöfina. Ég þarf í meiri mæli að hjálpa nemendum að koma auga á styrkleika eða veikleika í sinni vinnu. Einnig þarf ég að finna leiðir til að tryggja að endurgjöfin hjálpi nemendum að skilja hvað þau þurfi að bæta og af hverju það nýtist þeim að endurskoða þann hluta sem endurgjöfin beinist að.

Í hugsandi skólastofu er eitt af markmiðunum að leyfa nemendum að vinna í anda þrautalausna. Það er að glíma við verkefni án þess að þekkja lausnarleiðina. Í hugsandi skólastofu viljum við að nemendur hugsi, prófi sig áfram, rökræði og sýni þrautseigju. Það er því ekki markmiðið að kenna nemendum með skýrum og nákvæmum hætti um námsaðferðir eða vera með ítarlega sýnikennslu í hverjum einasta 15 mínútna hluta kennslunnar. Í hefðbundinni kennslu sinnir kennari oft þessum þáttum í upphafi kennslunnar sem í daglegu tali er kölluð innlög kennara. Í hugsandi skólastofu er lagt upp með að kennari segi eins lítið og mögulegt er í upphafi kennslustundar, en þó nóg til þess að nemendur skilji fyrsta verkefnið og geti byrjað að leysa það. Þegar allir hópar hafa komist yfir ákveðinn þröskuld í verkefnavinnunni tekur kennari umræðu með öllum hópnum um þá sameiginlegu reynslu og skilning sem nemendur hafa öðlast til að festa efnið í sessi. Mætti því segja að innlögnin eigi sér stað eftir að nemendur hafa fengið tækifæri til að vinna með hugtökin að einhverju leyti og jafnvel rekið sig á einhvers konar hindranir sem hægt er að taka fyrir og leysa í sameiningu í hópumræðu. Í þessum hluta gefst kennara gott tækifæri til að fara yfir námsaðferðir og vera með sýnikennslu. Ég leiddi tvisvar slíka hópumræðu í þessari kennsluviku. Í öðrum hlutanum var bæði sýnikennsla og kennsla námsaðferða metin á 4. þrepi en í hinum hlutanum var sýnikennsla metin á 4. þrepi en kennsla námsaðferða metin á 2. þrepi. Það gefur ákveðna vísbendingu um að þetta fyrirkomulag, að seinka innlögninni, gefi góða raun.

Umræða

Niðurstöður rannsóknarinnar gefa til kynna að kennslunálgunin hugsandi skólastofa geti reynst vel til að stuðla að vitsmunalegri áskorun og samræðum í skólastofunni og veiti einnig færi á að sýnikennsla, endurgjöf og kennsla námsaðferða sé á efri þrepum. Sýnikennsla og kennsla námsaðferða í þessari hugsandi skólastofu var metin á efsta þrepi, en sé það borið saman við 8. bekkjar skólastofur úr QUINT-rannsókninni sést að minnihluti skólastofa í stærðfræði var metinn á efsta þrepi (Klette o.fl., í prentun-b). Það að beita virkum kennsluháttum á borð við aðferðir hugsandi skólastofu virðist því auka gæði þessara þátta. Á Íslandi virðast hefðbundnir kennsluhættir ríkjandi í stærðfræðikennslu, bæði á efsta stigi grunnskólans (Birna Svanbjörnsdóttir o.fl., 2023; Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir, 2015; Þóra Þórðardóttir og Unnar Hermannsson, 2012) sem og í framhaldsskólum (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014) og virðast þeir gjarnan leiða til takmarkaðrar vitsmunalegrar áskorunar (Jóhann Örn Sigurjónsson og Berglind Gísladóttir, 2020). Þá benda rannsóknir til að samræður um námsefnið í stærðfræði séu af skörum skammti (Ingvar Sigurgeirsson o.fl., 2018; Savola, 2010). Í aðferðafræði hugsandi skólastofu er gert ráð fyrir að í mörgum tilfellum hafi bæði nemendur og kennari vanist viðmiðum hefðbundinnar kennslu í stærðfræði. Í þeim tilfellum þarf fyrst að brjóta niður þau viðmið sem finnast í hefðbundinni stærðfræðikennslu til að hægt sé að byggja upp hugsandi skólastofu (Liljedahl, 2020). Niðurstöðurnar gefa til kynna að hugsandi skólastofa sé fær leið fyrir

íslenska kennara til að innleiða menningu þar sem lögd er áhersla á röksemdafærslu, ályktunarhæfni og greinandi hugsun í gegnum samræður við samnemendur og kennara. Niðurstöðurnar gefa því ákveðna tilvistarsönnun þess að sé rétt staðið að innleiðingu hugsandi skólastofu er mögulegt, í íslensku samhengi, að stuðla að því að gæði kennslunnar séu á efri þrepum bæði hvað varðar faglegar kröfur og stigskiptan stuðning (Schoenfeld, 2007).

Í stærðfræðikennslu á efsta stigi grunnskóla og í framhaldsskólum á Íslandi er lítið um skipulagða para- og hópvinnu þó vísbendingar séu um að í slíkum kennslusniðum aukist líkur á að endurgjöf kennara til nemenda sé af meiri gæðum en gerist þegar um er að ræða einstaklingsvinnu nemenda (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014; Birna Svanbjörnsdóttir o.fl., 2023). Hér á landi virðist mikil áhersla á tiltekna útfærslu einstaklingsmiðaðs náms vera á kostnað stærðfræðilegrar samræðu og vitsmunalegrar áskorunar (Jóhann Örn Sigurjónsson og Berglind Gísladóttir, 2020; Savola, 2010). Í hugsandi skólastofu fer stór hluti kennslustunda fram þannig að nemendur vinna í tveggja til þriggja manna hópum. Í niðurstöðum sést að af þeim sjö hlutum sem nemendur unnu í slíkum hópum voru sex hlutar metnir á fjórða þrepi, bæði hvað varðar samræður í skólastofunni og vitsmunalega áskorun. Þetta samræmist niðurstöðum QUINT um að þessir þættir séu metnir hærra þegar um para- eða hópvinnu er að ræða. Þó einstaklingsvinna sé algengasta kennslusniðið í grunn- og framhaldsskólum á Norðurlöndum þá var aðeins lítill hluti framúrskarandi kennslustunda í 8. bekk notaður til einstaklingsvinnu samkvæmt QUINT-rannsókninni. Í þeim var hópumræða með öllum bekknum og hóp- eða paravinna algengasta kennslusniðið (Jóhann Örn Sigurjónsson, 2024). Aukin áhersla á samvinnu milli nemenda þar sem nemendur þurfa að hugsa saman um verkefni gæti verið leið til að auka hugræna virkjun í stærðfræðikennslu á Norðurlöndunum.

Í hugsandi skólastofu er mörgum kennslusniðum fléttað saman í sömu kennslustund; hópvinna í litlum hópum, hópumræða með öllum bekknum og sjálfstæð vinna nemenda. Þetta stuðlar að fjölbreyttu kennslusniði innan kennslustunda og er í takt við það sem fyrri rannsóknir benda til að skipti máli til að stuðla að vitsmunalegri áskorun, samræðum í skólastofunni og endurgjöf til nemenda (Birna Svanbjörnsdóttir o.fl., 2023; Jóhann Örn Sigurjónsson, 2024).

Í stærðfræðikennslu í efri bekkjum grunnskóla og í framhaldsskólum á Íslandi er hefð fyrir því að kennari hefji tímann á innlögn og í framhaldinu vinna nemendur að verkefnum sem byggja á innlögn kennarans. Í hugsandi skólastofu er lögd áhersla á að nemendur glími við verkefni án þess að þekkja lausnarleiðina fyrir fram. Innlögnin á sér síðan stað eftir að nemendur hafa fengið tækifæri til að hugsa og jafnvel reka sig á hindranir með hópnum sínum áður en þau taka þátt í hópumræðu með kennara um þá sameiginlegu reynslu sem verkefnavinnan færði þeim. Í þeim tveimur hlutum kennslustundanna sem kennarinn leiddi slíka hópumræðu með nemendum voru sýnikennsla og samræður í skólastofunni metin á 4. þrepi. Fyrri rannsóknir benda til aukins námsárangurs eldri nemenda þar sem innlögn kennara á sér stað eftir þrautalausnavinnu nemenda (Sinha og Kapur, 2021).

Hafa ber í huga að í þessari rannsókn er úrtakið aðeins einn nemendahópur hjá einum kennara og að notuð var virk kennsluaðferð sem hugsanlega mætti geta sér til um að samræmdist vel sumum af þeim matskvörðum sem notaðir voru. Áfanginn sem nemendahópurinn tók er á þriðja þrepi *Aðalnámskrár framhaldsskóla 2011* og því ekki skylduáfangi hjá öllum brautum. Nemendahópurinn er þannig einungis samsettur af nemendum sem velja sér braut sem krefst stærðfræðiáfanga á þriðja þrepi. Einnig ber að athuga að fjöldi nemenda í tímum þegar gögnum var safnað var einungis 13–14 sem er minna en almennt gengur og gerist í áföngum í framhaldsskólum á Íslandi. Því er alhæfingargildi niðurstaðna takmarkað þó tilvistarsönnunin sé gild.

Lokaorð

Á sviði stærðfræðimenntunar hefur hefðbundin stærðfræðikennsla í formi innlagnar með sýnidæmum og dæmareikningi nemenda svo til eingöngu út frá sýnidæmum verið gagnrýnd í marga áratugi. Þrátt fyrir það virðist stór hluti stærðfræðikennara festast í slíkum kennsluháttum. Velta má fyrir sér hvort stærðfræðikennara skorti leiðir og leiðsögn til að brjótast úr viðjum vanans. Aðferðum hugsandi skólastofu er ætlað að veita kennurum leið til að færa sig í átt að virkari kennsluháttum og veita hugsun og samræðum aukið vægi (Liljedahl, 2020).

Í þessari rannsókn hefur verið sýnt hvernig virkir kennsluhættir – í þessu tilviki hugsandi skólastofa, í einum nemendahóp, hjá einum kennara – skila tilteknum niðurstöðum um gæði kennslunnar. Ekki er hægt að draga víðtækar ályktanir um hugsandi skólastofu en þó gefa niðurstöðurnar vísbendingu um hverju sé hægt að áorka með hugsandi skólastofu eftir að hafa fetað fyrstu þrjú innleiðingarskref hennar. Niðurstöðurnar sýna hvernig aðferðir hugsandi skólastofu stuðla að gæðum kennslunnar á vissum sviðum en síður á öðrum. Þær gefa einnig vísbendingar um að tækifæri séu til að bæta kennslu kennarans enn frekar, til dæmis hvað varðar munnlega endurgjöf sem hefði þurft að vera í auknum mæli miðuð að skilningi nemenda á að bæta það sem þau gera. Von okkar höfunda er að rannsóknin verði kennurum hvatning í að nota virkar kennsluaðferðir til að styrkja stærðfræðilega hugsun og samræður nemenda.

Þakkir

Rannsóknin var styrkt af Rannsóknasjóði KÍ og þakka höfundar sjóðnum fyrir stuðninginn. Einnig fá nemendurnir sem tóku þátt í rannsókninni sérstakar þakkir.

Assessment of teaching quality in a thinking classroom in upper-secondary mathematics: Reflection on teaching practices in an upper-secondary school

Thinking classroom (Liljedahl, 2020) is a teaching methodology that revolves around creating a space where thinking is required, a space where students engage in tasks to build up understanding of new concepts and ideas, a space where students seek understanding through dialogue with peers and the teacher. In this research, the teaching of one mathematics teacher in an Icelandic upper-secondary school was observed. The objective of this research was to provide the teacher with feedback on the quality of his own teaching when teaching according to the methodology of a thinking classroom in mathematics education and to gain insight into the teacher's self-reflection on the results. This research was conducted collaboratively by a teacher and an external researcher, combining both action research (where the teacher investigated his own practice) and a classroom study (which the external researcher implemented).

In mathematics education in both upper- and lower-secondary schools, traditional teaching methods prevail, where instruction begins with the teacher's input, followed by individual student practice and exercises based on that input (Anna Helga Jónsdóttir et al., 2014; Ingvar Sigurgeirsson et al., 2018; Þóra Þórðardóttir & Unnar Hermannsson, 2012). Emphasis is placed on individual work, and on learning specific methods to solve particular types of problems (Birna Svanbjörnsdóttir et al., 2023; Guðný Helga Gunnarsdóttir & Guðbjörg Pálsdóttir, 2015; Savola, 2010). These methods seem to lead to a lack of focus on critical thinking, understanding, discussions, and reasoning (Anna Helga Jónsdóttir et al., 2014). Teachers sometimes struggle to maintain standards of analytical thinking during class, and it is common for them to reduce the challenge of activities (Jóhann Örn Sigurjónsson & Berglind Gísladóttir, 2020).

Thinking classroom, however, presents an alternative to traditional teaching methods. It emphasises collaboration among students in small groups of two to three, all working on the same task. The focus shifts to thinking, understanding, and student autonomy. Students actively seek information and support from their peers, and the teacher asks thought-provoking questions to stimulate their thinking.

Data were collected with audio recordings and observations during three mathematics lessons with a group of upper-secondary school students. These lessons were part of a course covering integration, differential equations, sequences, and series. Thirteen to fourteen students attended each lesson, ranging in age from 17 to 22. The mathematics teacher in this study began teaching according to the methodology of thinking classroom two years prior. During data collection, the teacher taught according to the first three toolkits of four in a thinking classroom.

Quality of teaching was evaluated using the PLATO framework (Grossman, 2015), using two of its overarching factors: disciplinary demand and instructional scaffolding. Under disciplinary demand, subcategories include intellectual challenge and classroom discourse. Instructional scaffolding encompasses modelling and use of models, feedback, and strategy use and instruction.

Key findings reveal that disciplinary demand was generally scored at higher levels. However, instructional scaffolding factors were evaluated at both higher and lower levels. Examples of modelling and use of models, and strategy use and instruction were observed at the highest level while feedback never scored at the highest level.

These results demonstrate that thinking classroom can be effectively used in the Icelandic context to create a learning environment where students collaboratively tackle challenging tasks that encourage analytical thinking. The teacher had the flexibility to

request explanations and reasoning, thus giving students the opportunity to deepen their understanding of the task and the solution process. Discussions were based on students' responses, allowing opportunities for explanation and active listening. Thinking classroom seems to provide good opportunities for feedback, which the teacher could have taken better advantage of. The feedback provided was often brief praise where deeper explanations were needed so that students would see their strengths and weaknesses in their work or solutions. The results highlight the potential of group discussions after students work with mathematical concepts rather than more traditional approaches that introduce concepts before students work on them. Results show that in these group discussions both modelling and classroom discourse scored at the highest level.

It should be noted that this study is based on a single group of students taught by one teacher and an active teaching method was used, which could potentially be assumed to align well with some of the assessment criteria that were used. The student group was small and consisted of students who had chosen a study programme that requires mathematics courses on calculus. Therefore, the generalisability of the results is limited but, for an Icelandic school context, it serves as an existence proof (Schoenfeld, 2007).

Keywords: thinking classroom, teaching quality, mathematics education, mathematics teaching, upper-secondary school, classroom study

Um höfunda

Eyþór Eiríksson (eythor.eiriksson@mk.is) er stærðfræðikennari og hefur unnið við framhaldsskóla frá árinu 2020. Hann lauk M.Sc. í menntun framhaldsskólakennara árið 2022 frá Háskóla Íslands. Meistararitgerð hans var starfendarannsókn um hugsandi skólastofu. Áður kláraði hann B.Sc. í stærðfræði og stærðfræðimenntun frá Háskóla Íslands. Hann hefur frá árinu 2022 kennt samkvæmt hugmyndafræði hugsandi skólastofu.

Jóhann Örn Sigurjónsson (johannorn@midstodmenntunar.is) er sérfræðingur í stærðfræðimenntun við Miðstöð menntunar og skólaþjónustu. Hann lauk doktorsprófi í menntavísindum frá Háskóla Íslands árið 2023 og hefur þaðan einnig menntun á sviði faggreinakennslu og tölvunarfræði. Rannsóknarsvið hans beinist að þróun stærðfræðikennslu, notkun námsefnis, námsmati í stærðfræði og gæðapáttum í kennslu á borð við hugræna virkjun og stuðning við nám.

About the authors

Eyþór Eiríksson (eythor.eiriksson@mk.is) is a mathematics teacher and has worked in an upper-secondary school since 2020. He attained an M.Sc. in upper secondary school teaching from the University of Iceland in 2022. His master's thesis was an action research about thinking classroom. Previously, he attained a B.Sc. in mathematics and mathematical education from the University of Iceland. Since 2022, he has been teaching according to the methodology of thinking classroom.

Jóhann Örn Sigurjónsson (johannorn@midstodmenntunar.is) is a specialist in mathematics education at the Directorate of Education and School Services. He attained a Ph.D. in educational sciences from the University of Iceland in 2023 and also holds degrees in subject didactics and computer science. His research interests include the development of mathematics teaching, use of learning materials, assessment in mathematics, and dimensions of teaching quality such as cognitive activation and student support.

Heimildir

- Anna Helga Jónsdóttir, Freyja Hreinsdóttir, Freyr Þórarinnsson, Jón Ingólfur Magnússon og Rögnvaldur G. Möller. (2014). *Úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum*. Mennta- og menningarmálaráðuneytið. <https://www.stjornarradid.is/media/menntamalaraduneyti-media/media/frettir2014/uttekta-a-staerdfaedikennslu-i-framhaldsskolum-2014.pdf>
- Bell, C. A., Dobbelaer, M. J., Klette, K. og Visscher, A. (2019). Qualities of classroom observation systems. *School Effectiveness and School Improvement*, 30(1), 3–29. <https://doi.org/10.1080/09243453.2018.1539014>
- Birna Svanbjörnsdóttir, Sólveig Zophoníasdóttir og Berglind Gísladóttir. (2023). Quality of the stated purpose and the use of feedback in Icelandic lower-secondary classrooms results from a video study. *Teaching and Teacher Education*, 121, 103946. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103946>
- Carroll, J. B. (1963). A model of school learning. *Teachers College Record*: 64(8), 1–9. <https://doi.org/10.1177/016146816306400801>
- Carroll, L. (1880). The cats and rats again. Í *The Monthly Packet of Evening Readings for Members of the English Church*, 29, (bls. 107–108). Walter Smith.
- Cohen, J. (2018). Practices that cross disciplines? Revisiting explicit instruction in elementary mathematics and English language arts. *Teaching and Teacher Education*, 69, 324–335. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.10.021>
- Elf, N. (2022). The surplus of quality: How to study quality in teaching in three QUINT projects. Í M. Blikstad-Balas, K. Klette og M. Tengberg (ritstjórar), *Ways of analyzing teaching quality* (bls. 53–88). Scandinavian University Press. <https://doi.org/10.18261/9788215045054-2021-02>
- Grossman, P. (2015). *Protocol for language arts teaching observations (PLATO 5.0)*. Center to Support Excellence in Teaching, Stanford University.
- Grossman, P., Loeb, S., Cohen, J. og Wyckoff, J. (2013). Measure for measure: The relationship between measures of instructional practice in middle school English language arts and teachers' value-added scores. *American Journal of Education*, 119(3), 445–470. <https://doi.org/10.1086/669901>
- Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir. (2015). Instructional practices in mathematics classrooms. Í K. Krainer og N. Vondrová (ritstjórar), *CERME 9 – Ninth congress of the European society for research in mathematics education* (bls. 3036–3042). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME. <https://hal.science/hal-01289736>
- Guðný Helga Gunnarsdóttir, Jónína Vala Kristinsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir. (2013). Professional development in mathematics teacher education. Í C. Smith (ritstjóri), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 32(3), 85–90. <https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/02/BSRLM-IP-32-3-15.pdf>
- Ingólfur Gíslason. (2023). Prófadriðinn kennsla og umhyggja fyrir stærðfræðinámi. *Netla – Vef tímarit um uppeldi og menntun*. <https://doi.org/10.24270/netla.2023/21>
- Ingvar Sigurgeirsson, Elsa Eiríksdóttir og Ingólfur Ásgeir Jóhannesson. (2018). Kennsluáðferðir í 130 kennslustundum í framhaldsskólum. *Sérít Netlu 2018 – Framhaldsskólinn í brennidepli*. <https://doi.org/10.24270/serritnetla.2019.9>
- Jóhann Örn Sigurjónsson. (2023a, 10. nóvember). Gæðaðferðir í kennslu á Íslandi: Íslenska, stærðfræði og samfélagsfræði [fyrirlestur]. *Gæði kennslu í nútíð og framtíð*, Reykjavík. <https://skolathroun.is/wp-content/uploads/2023/11/quint-template-QUINT-nov2023-JOS-adalerindi.pdf>
- Jóhann Örn Sigurjónsson. (2023b). Quality in Icelandic mathematics teaching: Cognitive activation in mathematics lessons in a Nordic context [doktorsritgerð, Háskóli Íslands]. *Opin vísindi*. <https://hdl.handle.net/20.500.11815/3843>
- Jóhann Örn Sigurjónsson. (2024). Teaching mathematics with high cognitive activation: Instructional formats and connection-making interactions in high-level Nordic lessons. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 29(2), 5–26. <https://ncm.gu.se/2024/06/nomad-29-2/>
- Jóhann Örn Sigurjónsson og Berglind Gísladóttir. (2020). Vitsmunaleg áskorun í stærðfræðikennslu á

- unglingastigi. *Tímarit um uppeldi og menntun*, 29(2), 149–171. <https://doi.org/10.24270/tuuom.2020.29.8>
- Jónína Vala Kristinsdóttir og Ólöf Björg Steinþórsdóttir. (2023). Að móta námsumhverfi í stærðfræði þar sem skapandi hugsun er í fyrirrúmi: Kristjana Skúladóttir stærðfræðikennari. *Sérrit Netlu 2023 – Þau skiptu máli: Sögur grunnskólakennara*. <https://doi.org/10.24270/serritnetla.2023.5>
- Klette, K., Magnusson, C. G. og Jóhann Örn Sigurjónsson (ritstjórar). (í prentun-a). *Investigating teaching quality through video capture: Quality and equity in Nordic classrooms*. Springer.
- Klette, K., Tengberg, M., Magnusson, C. G., Selling, A. og Jóhann Örn Sigurjónsson. (í prentun-b). Role of explicit instruction in the Nordic context. Í K. Klette, C. G. Magnusson og Jóhann Örn Sigurjónsson (ritstjórar), *Investigating teaching quality through video capture: Quality and equity in Nordic classrooms*. Springer.
- Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin.
- Liljedahl, P. (2024). *Mathematics tasks for the thinking classroom, grades K-5*. Corwin.
- Liljedahl, P. (í prentun). *Hugsandi skólastofa í stærðfræði: 14 aðferðir sem styðja við nám og kennslu á öllum skólastigum* (Bjarnheiður Kristinsdóttir þýddi). Háskólaútgáfan.
- Marton, F. og Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Lawrence Erlbaum.
- Mennta- og menningarmálaráðuneytið. (1999). *Aðalnámskrá framhaldsskóla 1999: Stærðfræði*.
- Mennta- og menningarmálaráðuneytið. (2012). *Aðalnámskrá framhaldsskóla 2011: Almennur bluti*.
- OECD. (2020). *Global teaching insights: A video study of teaching*. <https://doi.org/10.1787/20d6f36b-en>
- Praetorius, A.-K. og Charalambous, C. Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: Looking back and looking forward. *ZDM - Mathematics education*, 50(3), 535–553. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0>
- Praetorius, A.-K. og Charalambous, C. Y. (ritstjórar). (2023). *Theorizing teaching: Current status and open issues*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-25613-4>
- Savola, L. (2010). Comparison of the classroom practices of Finnish and Icelandic mathematics teachers. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 1(2), 7–13. <https://doi.org/10.7916/jmetc.v1i2.683>
- Schoenfeld, A. H. (2007). Method. Í F. K. Lester (ritstjóri), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, vol. 1* (bls. 69–107). Information Age Publishing.
- Sinha, T. og Kapur, M. (2021). When problem solving followed by instruction works: Evidence for productive failure. *Review of Educational Research*, 91(5), 761–798. <https://doi.org/10.3102/00346543211019105>
- Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM - Mathematics education*, 33(4), 123–132. <https://doi.org/10.1007/BF02652747>
- Stovner, R. B. og Klette, K. (2022). Teacher feedback on procedural skills, conceptual understanding, and mathematical practices: A video study in lower secondary mathematics classrooms. *Teaching and Teacher Education*, 110, 103593. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2021.103593>
- Tomlinson, C. A. (1999). *The differentiated classroom: Responding to the needs of all learners*. ASCD.
- Þóra Þórðardóttir og Unnar Hermannsson. (2012). *Úttekt á stærðfræðikennslu á unglingsstigi grunnskóla. Mennta- og menningarmálaráðuneytið*. https://www.stjornarradid.is/media/menntamalaraduneyti-media/media/ritogskyrslur/utt_stfr_unglst_grsk_2012.pdf



Eyþór Eiríksson og Jóhann Örn Sigurjónsson (2025).

Mat á gæðum kennslu í hugsandi skólastofu í stærðfræði á framhaldsskólastigi: Rýnt í kennslu framhaldsskólakennara

Netla – Vef tímarit um uppeldi og menntun. Menntavísindasvið Háskóla Íslands.

<http://netla.hi.is>

DOI: <https://doi.org/10.24270/netla.2025/2>

Viðauki A

1. Reiknið eftirfarandi heildi og túlkið niðurstöðuna.

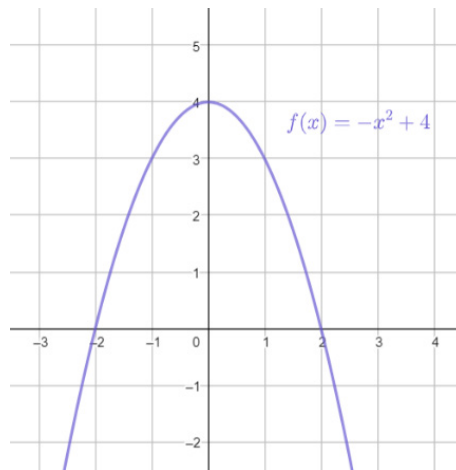
$$\int_1^2 2e^{0,3x} dx$$

$$\int_0^1 -2x^3 + 3\sqrt{x} dx$$

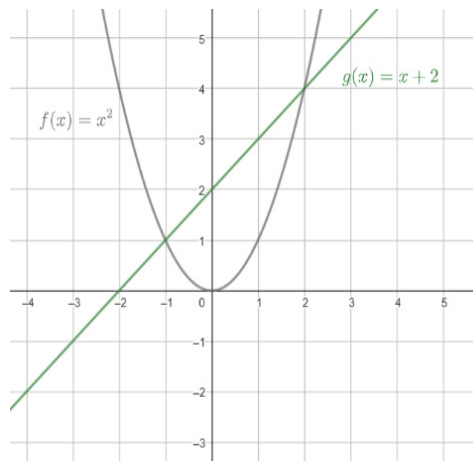
$$\int_{-2}^2 x^2 - 4 dx$$

2. Litið svæðið sem eftirfarandi heildi tákna.

$$\int_0^2 -x^2 + 4 dx$$



$$\int_{-1}^2 x + 2 dx - \int_{-1}^2 x^2 dx$$



3. Finnið flatarmál skyggðu svæðanna á myndunum.

